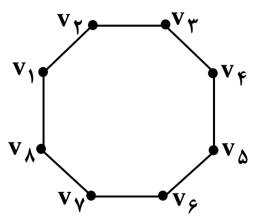
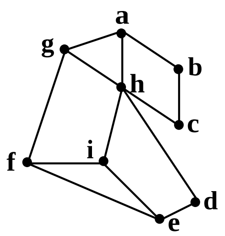
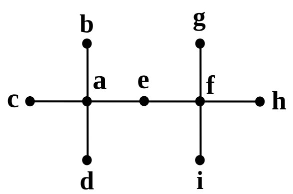
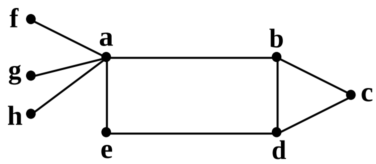
ردیف		نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) از مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، حداکثر یک رأس می‌توان حذف کرد تا همچنان احاطه‌گر باقی بماند. ب) اگر گرافی ۶ رأس و ۱۵ یال داشته باشد، عدد احاطه‌گری آن ۱ است. پ) ۴ دختر و ۳ پسر به ۱۲۰ حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند به‌طوری‌که دختر و پسرها یکی در میان باشند. ت) با ارقام ۲،۲،۳،۵ می‌توان ۱۲ عدد چهار رقمی متمایز نوشت.	۱
۲	جاهای خالی را با اعداد یا کلمات مناسب پر کنید. الف) زیرمجموعهٔ D از مجموعه رئوس گراف G را .... می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل بـا یکـی از رئوس D مجاور باشد. ب) کمترین مقدار عدد احاطه‌گری یک گراف ۲− منتظم ۱۲ رأسی عدد .... است. پ) با حروف کلمهٔ «زمزمه» تعداد .... کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت. ت) مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال گراف کامل مرتبهٔ ۱۵، تعداد .... عضو دارد.	۲
۳	عدد احاطه‌گری را در گراف‌های زیر، بیابید. الف)  ب) 	۲
۴	اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma(G) = 1$، حداقل و حداکثر تعداد یال‌هایی را که G می‌تواند داشته باشـد، بـرای یـک گـراف ۶ رأسی با رسم شکل مشخص کنید.	۲
۵	گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید، به‌طوری که: الف) دارای مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا باشد. ب) دارای مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا نباشد.	۱
۶	گراف G روبه‌رو را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۳ عضوی برای آن بنویسید. ب) عدد احاطه‌گری گراف را تعیین کنید. پ) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال غیر مینیمم برای آن بنویسید. ت) با افزودن حداقل چند یال، مقدار $\gamma(G)$ برابر ۱ می‌شود؟ 	۲
۷	گراف P_{14} را رسم کنید. الف) یک $\gamma-$ مجموعه از آن را مشخص کنید. ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۷ عضوی از آن را بنویسید.	۱/۵

<table>
<tr><th>ردیف</th><th></th><th>نمره</th></tr>
<tr><td>۸</td><td>
فرض کنید A، B، C، D، E، F و G شهرهای یک استان باشند و فاصلهٔ مستقیم این شهرها از یکدیگر دوبه‌دو مطابق با جدول زیر باشد. می‌خواهیم تعدادی ایستگاه رادیویی در برخی از این شهرها تأسیس کنیم به‌طوری که همهٔ شهرها از پوشش امواج رادیویی برخوردار شوند و از طرفی می‌خواهیم کمترین تعداد ایستگاه رادیویی را تأسیس کنیم. اگر هر ایستگاه تا ۵۰ کیلومتر اطراف خود را پوشش دهد. با رسم گراف مناسب، تعیین کنید حداقل چند ایستگاه رادیویی احتیاج داریم و در چه شهرهایی باید احداث کنیم؟
<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th><th>G</th></tr>
<tr><td>A</td><td>۰</td><td>۵۰</td><td>۸۰</td><td>۴۰</td><td>۶۰</td><td>۹۰</td><td>۵۰</td></tr>
<tr><td>B</td><td>۵۰</td><td>۰</td><td>۵۵</td><td>۳۰</td><td>۶۰</td><td>۷۰</td><td>۶۰</td></tr>
<tr><td>C</td><td>۸۰</td><td>۵۵</td><td>۰</td><td>۴۰</td><td>۶۰</td><td>۲۰</td><td>۵۰</td></tr>
<tr><td>D</td><td>۴۰</td><td>۳۰</td><td>۴۰</td><td>۰</td><td>۳۰</td><td>۵۵</td><td>۳۰</td></tr>
<tr><td>E</td><td>۶۰</td><td>۶۰</td><td>۶۰</td><td>۳۰</td><td>۰</td><td>۵۰</td><td>۱۰</td></tr>
<tr><td>F</td><td>۹۰</td><td>۷۰</td><td>۲۰</td><td>۵۵</td><td>۵۰</td><td>۰</td><td>۴۰</td></tr>
<tr><td>G</td><td>۵۰</td><td>۶۰</td><td>۵۰</td><td>۳۰</td><td>۱۰</td><td>۴۰</td><td>۰</td></tr>
</table>
</td><td>۲</td></tr>
<tr><td>۹</td><td>
با تعیین عدد احاطه‌گری، تمام $\gamma-$ مجموعه‌های گراف شکل مقابل را بنویسید.


</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۱۰</td><td>
با استدلال نشان دهید هر مجموعهٔ احاطه‌گر دلخواه غیر مینیمال را می‌توان با حذف برخی رئوسش به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد.
</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۱۱</td><td>
۹ نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان یابند؟
</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۱۲</td><td>
۵ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۴ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم به چند حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند، به‌طوری که:
الف) دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم همواره کنار هم باشند.
ب) هیچ دو دانش‌آموز پایهٔ دوازدهمی کنار هم نباشند.
</td><td>۱/۵</td></tr>
<tr><td>۱۳</td><td>
هفت حرف a,a,a,b,b,c,d به چند حالت می‌توانند کنار هم قرار بگیرند به‌طوری که حروف b همواره کنار هم باشند؟
</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۱۴</td><td>
اگر داشته باشیم $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{a,b,c,d,e\}$، در این صورت چند رمز با ۵ کاراکتر می‌توان نوشت که هریک شامل دو رقم غیرتکراری از مجموعهٔ A و سه حرف غیرتکراری از مجموعهٔ B باشد؟
</td><td>۱</td></tr>
</table>

موفق باشید

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

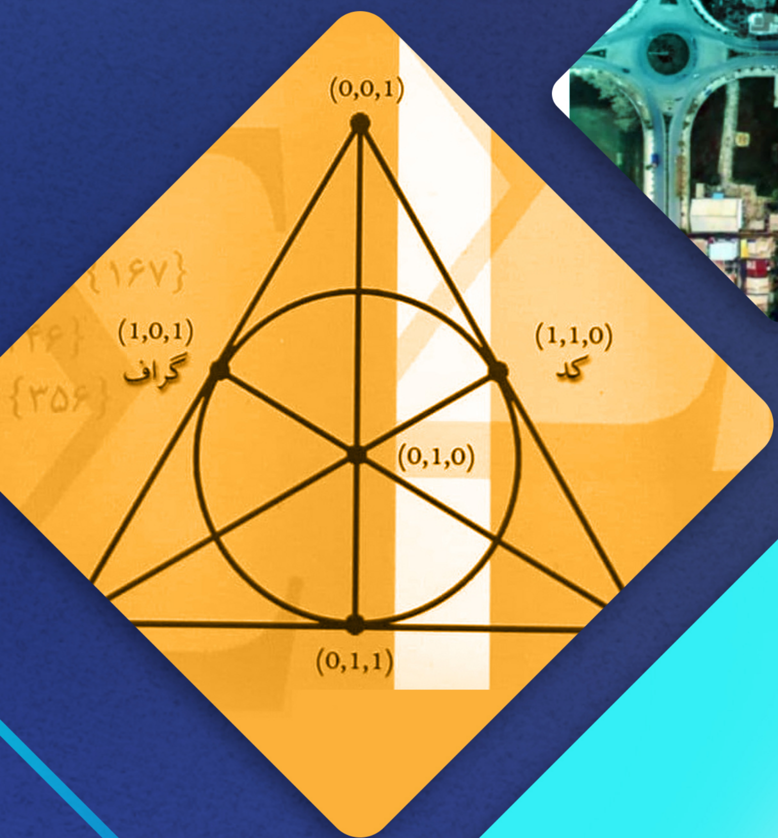
ویژهٔ پایهٔ دوازدهم

اسفند ۱۴۰۳

دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۳

ریاضیات گسسته (رشته ریاضی و فیزیک)



۱۴۰۳_۱۴۰۴

-۱

الف) نادرست

نکته: یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هریک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.
مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مجموعه‌ای است که با حذف هر رأس آن دیگر احاطه‌گر نیست؛ بنابراین اصلاً نمی‌توان از آن رأسی حذف کرد تا همچنان احاطه‌گر باقی بماند.

ب) درست

نکته: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.
نکته: در هر گراف کامل p رأسی تعداد یال‌ها برابر است با:

$$q=\binom{p}{۲}=\frac{p(p-۱)}{۲}$$

این گراف، کامل است زیرا $۱۵=\binom{۶}{۲}=q$، بنابراین عدد احاطه‌گری آن ۱ است.

پ) نادرست

تعداد حالات یکی در میان قرار گرفتن ۴ دختر و ۳ پسر برابر $۱۴۴=۳!۴!$ است.

ت) درست

نکته (قضیهٔ جایگشت باتکرار): اگر n شیء مفروض باشند، به‌طوری که $n_۱$ تای آن‌ها از نوع اول و یکسان و $n_۲$ تای آن‌ها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آن‌ها از نوع kاُم و یکسان باشند در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیاء برابر است با:

$$\frac{n!}{n_۱!\times n_۲!\times\cdots\times n_k!}$$

طبق نکته، تعداد اعداد چهار رقمی متمایز برابر با $۱۲=\frac{۴!}{۲!}$ است.

-۲

الف) مجموعهٔ احاطه‌گر

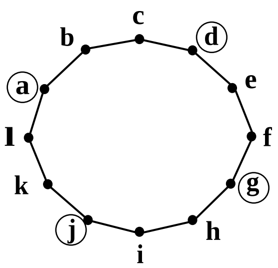
نکته: زیرمجموعهٔ D از مجموعهٔ رئوس گراف G را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.

ب) ۴

نکته: اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجهٔ Δ باشد و D یک مجموعهٔ احاطه‌گر در آن باشد، آن‌گاه $\left[\frac{n}{\Delta+۱}\right]\le|D|$ و از آنجا که $\gamma(G)$ نیز اندازهٔ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است همواره داریم $\left[\frac{n}{\Delta+۱}\right]\le\gamma(G)$ (اصطلاحاً گفته می‌شود در گراف G عدد $\left[\frac{n}{\Delta+۱}\right]$ یک کران پایین است برای $\gamma(G)$؛ یعنی $\gamma(G)$ نمی‌تواند از آن کمتر شود).

طبق نکته عدد احاطه‌گری، کران پایینی به‌صورت $\gamma\ge\left[\frac{n}{\Delta+۱}\right]$ دارد، بنابراین در گراف ۲- منتظم مرتبهٔ ۱۲ همواره $\gamma\ge\left[\frac{۱۲}{۲+۱}\right]$ یا $\gamma\ge۴$ است و اگر یک گراف نمونه را هم بررسی کنیم γ به‌صورت روبه‌رو به‌دست می‌آید:

$\gamma=۴$



پ) ۳۰

نکته (قضیهٔ جایگشت باتکرار): اگر n شیء مفروض باشند، به‌طوری که $n_۱$ تای آن‌ها از نوع اول و یکسان و $n_۲$ تای آن‌ها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آن‌ها از نوع kاُم و یکسان باشند در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیاء برابر است با:

$$\frac{n!}{n_۱!\times n_۲!\times\cdots\times n_k!}$$

طبق نکته تعداد کلمات پنج حرفی با حروف کلمهٔ «زمزمه» از رابطهٔ $۳۰=\frac{۵!}{۲!\times۲!}$ به‌دست می‌آید.

ت) یک

نکته: یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هریک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.
طبق نکته در گراف‌های کامل، تعداد اعضای مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، یک عضو دارد.

-۳

نکته: زیرمجموعهٔ D از مجموعهٔ رئوس گراف G را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.

نکته: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

نکته: برای نوشتن مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، اغلب با رأسی شروع می‌کنیم که بیشترین درجهٔ رأس را داشته باشد و به همین صورت از رئوسی که احاطه نشده‌اند، ادامه می‌دهیم.

نکته: اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجهٔ Δ باشد و D یک مجموعهٔ احاطه‌گر در آن باشد، آن‌گاه $\left[\frac{n}{\Delta+1}\right] \le |D|$ و از آنجا که $\gamma(G)$ نیز اندازهٔ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است همواره داریم $\left[\frac{n}{\Delta+1}\right] \le \gamma(G)$ (اصطلاحاً گفته می‌شود در گراف G عدد $\left[\frac{n}{\Delta+1}\right]$ یک کران پایین است برای $\gamma(G)$؛ یعنی $\gamma(G)$ نمی‌تواند از آن کمتر شود).

برای یافتن عدد احاطه‌گری، ابتدا کران پایین عدد احاطه‌گری را به‌دست می‌آوریم و سپس با توجه به شکل گراف مجموعهٔ احاطه‌گر را تعیین می‌کنیم. اکنون به بررسی هر گراف می‌پردازیم.

الف) $\gamma \ge \left[\frac{n}{\Delta+1}\right] \xrightarrow[\Delta=۲]{n=۸} \gamma \ge \left[\frac{۸}{۲+۱}\right] \Rightarrow \gamma \ge ۳$

با توجه به شکل داده‌شده، عدد احاطه‌گری همان $\gamma = ۳$ می‌باشد. به‌طور مثال اگر مجموعهٔ $\{v_۱, v_۴, v_۷\}$ را انتخاب کنیم. هر رأس گراف، یا در این مجموعه وجود دارد و یا حداقل با یکی از اعضای این مجموعه مجاور است. پس $\gamma \le ۳$ و در نتیجه: $\gamma = ۳$

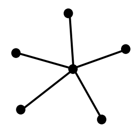
ب) ابتدا کران پایین عدد احاطه‌گری را برای این گراف حساب می‌کنیم: $\gamma \ge \left[\frac{۹}{۵+۱}\right] \Rightarrow \gamma \ge ۲$

برای احاطه کردن این گراف از رأس با ماکزیمم درجه یعنی رأس h شروع می‌کنیم؛ حال از بین رئوس باقی‌مانده، رأس‌های b، f و e را داریم که با انتخاب فقط یکی از این رئوس گراف به‌صورت کامل احاطه نمی‌شود و باید سراغ رأس سوم برویم که در این صورت مجموعه‌های $\{h,b,f\}$، $\{h,b,e\}$ و $\{h,b,i\}$ احاطه‌گر مینیمم خواهند بود، پس: $\gamma = ۳$

-۴

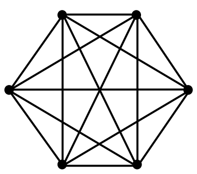
نکته: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

با توجه به نکته، حداقل یال برای زمانی است که یک رأس Δ به همهٔ رئوس دیگر متصل بوده و بقیهٔ رئوس همگی از درجهٔ یک باشند که در این حالت تعداد یال‌ها برابر $n-۱$ است.



$q_{min} = ۶-۱ = ۵$

همچنین حداکثر یال برای زمانی است که گراف،کامل باشد که در این حالت تعداد یال‌ها برابر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است.



$q_{max} = \frac{۶\times۵}{۲} = ۱۵$

-۵

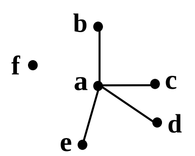
نکته: زیرمجموعهٔ D از مجموعهٔ رئوس گراف G را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.

نکته: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

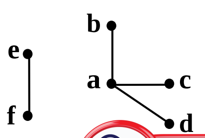
برای رسم این گراف‌ها، بهتر است یک رأس را با درجهٔ $\Delta = p-۲$ رسم کنید و اگر می‌خواهید مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا داشته باشد رأس مانده را به‌طور منفرد قرار دهید و هنگامی‌که می‌خواهیم مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یکتا نداشته باشد، یک رأس را با درجهٔ $\Delta = p-۳$ و دو رأس مانده را با یک یال، جدا از این رئوس رسم کنید.

بنابراین در قسمت‌های «الف» و «ب» مطابق همین توضیحات خواهیم داشت:

الف)



ب)



-۶

نکته: زیرمجموعهٔ D از مجموعهٔ رئوس گراف G را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.

نکته: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

نکته: یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.

نکته: اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجهٔ Δ باشد و D یک مجموعهٔ احاطه‌گر در آن باشد، آن‌گاه $\left[\frac{n}{\Delta+1}\right] \le |D|$ و از آنجا که $\gamma(G)$ نیز اندازهٔ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است همواره داریم $\left[\frac{n}{\Delta+1}\right] \le \gamma(G)$ (اصطلاحاً گفته می‌شود در گراف G عدد $\left[\frac{n}{\Delta+1}\right]$ یک کران پایین است برای $\gamma(G)$؛ یعنی $\gamma(G)$ نمی‌تواند از آن کمتر شود).

الف) باید زیرمجموعه‌ای ۳ عضوی از رئوس گراف را بنویسیم که هر رأس یا عضو آن باشد و یا حداقل با یکی از اعضای آن مجاور باشد، مانند: $\{a,f,e\}$

ب) با توجه به تعداد رئوس گراف و ماکزیمم درجه داریم $\gamma \ge \left[\frac{9}{4+1}\right]$ و در نتیجه $\gamma \ge 2$ است و اگر شکل را هم مورد بررسی قرار دهیم $\gamma = 2$ است و می‌توان مجموعهٔ $\{a,f\}$ را به‌عنوان مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم مشخص کرد.

پ) باید مجموعه‌ای احاطه‌گر و غیرمینیمم مشخص کنیم که با حذف هر رأس، دیگر احاطه‌گر نباشد، مانند: $\{b,c,d,f\}$ یا $\{a,g,h,i\}$ یا $\{b,c,d,e,g,h,i\}$

ت) برای آن‌که عدد احاطه‌گری گراف برابر یک شود باید یک رأس به همهٔ رئوس دیگر متصل باشد و از آن‌جایی که گراف ۹ رأس دارد پس باید درجه یک رأس ۸ باشد، در این گراف $\Delta = 4$ است پس با افزودن ۴ یال به یکی از رئوس درجه Δ، مقدار $\gamma(G)$ برابر یک می‌شود.

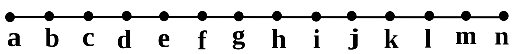
-۷

نکته: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

نکته: یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.

نکته: اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجهٔ Δ باشد و D یک مجموعهٔ احاطه‌گر در آن باشد، آن‌گاه $\left[\frac{n}{\Delta+1}\right] \le |D|$ و از آنجا که $\gamma(G)$ نیز اندازهٔ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است همواره داریم $\left[\frac{n}{\Delta+1}\right] \le \gamma(G)$ (اصطلاحاً گفته می‌شود در گراف G عدد $\left[\frac{n}{\Delta+1}\right]$ یک کران پایین است برای $\gamma(G)$؛ یعنی $\gamma(G)$ نمی‌تواند از آن کمتر شود).

کافی است P_{14} را رسم کنیم و موارد خواسته‌شده را مشخص کنیم.



الف) ابتدا کران پایین عدد احاطه‌گری را می‌یابیم:

$$\gamma \ge \left[\frac{14}{2+1}\right] \Rightarrow \gamma \ge 5$$

مطابق شکل گراف مجموعهٔ $\{b,e,h,k,n\}$ احاطه‌گر مینیمم می‌باشد.

ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۷ عضوی عبارتست از:

$\{a,c,e,g,i,k,m\}$

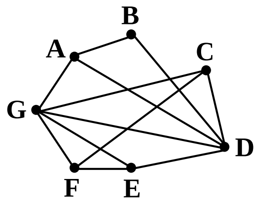
-۸

نکته: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

نکته: اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجهٔ Δ باشد و D یک مجموعهٔ احاطه‌گر در آن باشد، آن‌گاه $\left[\frac{n}{\Delta+1}\right] \le |D|$ و از آنجا که $\gamma(G)$ نیز اندازهٔ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است همواره داریم $\left[\frac{n}{\Delta+1}\right] \le \gamma(G)$ (اصطلاحاً گفته می‌شود در گراف G عدد $\left[\frac{n}{\Delta+1}\right]$ یک کران پایین است برای $\gamma(G)$؛ یعنی $\gamma(G)$ نمی‌تواند از آن کمتر شود).

برای رسم، شهرها را رئوس گراف در نظر بگیرید و شهرهایی که فاصلهٔ آن‌ها ۵۰ و کمتر از ۵۰ است را به هم وصل می‌کنیم تا شکل زیر به‌دست آید.

الف)

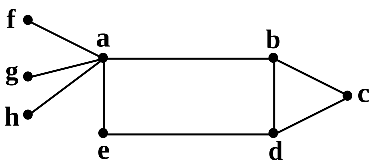


اکنون برای تعیین حداقل تعداد ایستگاه رادیویی، باید عدد احاطه‌گری گراف حاصل را مشخص کنیم. ابتدا کران پایین عدد احاطه‌گری را به‌دست می‌آوریم:

$$\gamma \geq \left[\frac{n}{\Delta+1}\right] \xrightarrow[\Delta=۵]{n=۷} \gamma \geq \left[\frac{۷}{۵+۱}\right] \Rightarrow \gamma \geq ۲$$

مطابق شکل مجموعهٔ $\{D,F\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، پس $\gamma = ۲$ و این یعنی با احداث حداقل ۲ ایستگاه رادیویی در شهرهایی مثل D و F به مطلوبمان می‌رسیم.

۹-



نکته: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

واضح است که عدد احاطه‌گری برابر ۲ است و γ- مجموعه‌های آن عبارتند از:

$\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\}$

۱۰-

نکته: یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.

اگر مجموعهٔ $\{a_۱,a_۲,a_۳,\ldots,a_n\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال باشد، در این‌صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آن‌ها مجموعهٔ احاطه‌گر، مینیمال باقی می‌ماند. بنابراین عضوی مانند $a_۱$ را در نظر می‌گیریم، اگر با حذف آن هنوز مجموعه احاطه‌گر باقی بماند، آن‌را حذف می‌کنیم، در غیر این‌صورت آن‌را نگه داشته و این کار را برای سایر رئوس انجام می‌دهیم.

۱۱-

راه‌حل اول:

برای هر اتاق متناسب با ظرفیت آن افراد را انتخاب می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\binom{۹}{۲}\times\binom{۷}{۳}\times\binom{۴}{۴} = ۳۶\times۳۵\times۱ = ۱۲۶۰$$

راه‌حل دوم:

نکته (قضیهٔ جایگشت باتکرار): اگر n شیء مفروض باشند، به‌طوری که $n_۱$ تای آن‌ها از نوع اول و یکسان و $n_۲$ تای آن‌ها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آن‌ها از نوع k اُم و یکسان باشند در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیاء برابر است با:

$$\frac{n!}{n_۱!\times n_۲!\times\cdots\times n_k!}$$

این مسئله معادل یک مسئله جایگشت با تکرار است که در آن ۲ شیٔ از نوع اول و یکسان، ۳ شیٔ از نوع دوم و یکسان و ۴ شیٔ از نوع سوم و یکسان‌اند، پس طبق نکته خواهیم داشت:

$$\frac{۹!}{۲!۳!۴!} = ۱۲۶۰$$

۱۲-

الف) دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم را در یک بسته قرار می‌دهیم و پس از محاسبهٔ جایگشت بسته با دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم، جایگشت داخل بسته را نیز در نظر می‌گیریم، پس داریم:

د د د د د د [ی ی ی ی] $\Rightarrow ۴!\times۶!$

ب) برای این حالت کافی است دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم و یازدهم به صورت یک در میان کنار هم قرار بگیرند:

د ی د ی د ی د ی د $\Rightarrow ۵!\times۴!$

-۱۳

نکته (قضیهٔ جایگشت باتکرار): اگر n شیء مفروض باشند، به‌طوری که n_1 تای آن‌ها از نوع اول و یکسان و n_2 تای آن‌ها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آن‌ها از نوع k اُم و یکسان باشند در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیاء برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\cdots\times n_k!}$$

حروف b را در یک بسته قرار می‌دهیم و پس از محاسبهٔ جایگشت بسته با حروف دیگر و با توجه به تعداد تکرار a، عدد حاصل را بر $3!$ تقسیم می‌کنیم.

$\boxed{bb}\,aaacd$

$$\frac{6!}{3!}=120$$

توجه کنید که چون حروفی که در یک بسته قرار گرفته‌اند، مشابه هم هستند، جایگشت ندارند و لازم نیست جایگشت حروف داخل بسته را حساب کنید.

-۱۴

کافی است دو رقم از ۴ عضو مجموعهٔ A و سه حرف از ۵ عضو مجموعهٔ B انتخاب کنیم و در نهایت جایگشت آن‌ها را نیز در نظر بگیریم، داریم:

$$\binom{4}{2}\times\binom{5}{3}\times 5!=6\times 10\times 5!=60\times 120=7200$$